



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο  
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών  
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών

**Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα**

Διδάσκοντες: Δημήτρης Φωτάκης, Δώρα Σούλιου

**3η Σειρά Προγραμματιστικών Ασκήσεων - Ημ/νία Παράδοσης 12/1/2017**

### Άσκηση 1: Τηλεμεταφορές

Σε έναν μακρινό γαλαξία, η Αυτοκρατορία αποφάσισε να δημιουργήσει ένα νέο διαστημικό δίκτυο μεταφοράς εμπορευμάτων, ώστε να διευκολύνει το διαπλανητικό εμπόριο. Για το σκοπό αυτό, πρέπει να δημιουργήσει αμφίδρομα κανάλια μεταφοράς μεταξύ κάποιων ζευγών πλανητών. Η δημιουργία καναλιού μεταφοράς μεταξύ δύο πλανητών  $i$  και  $j$  κοστίζει  $A[i, j]$ , καθώς πρέπει να απομακρυνθούν όσοι αστεροειδείς βρίσκονται ανάμεσα στους πλανήτες  $i$  και  $j$ , ενώ μπορεί να υπάρχουν ζευγάρια πλανητών μεταξύ των οποίων δεν είναι εφικτή η δημιουργία καναλιού μεταφοράς. Επιπλέον, υπάρχουν  $K$  πλανήτες που διαθέτουν πιο ανεπτυγμένη τεχνολογία και υποστηρίζουν την εγκατάσταση τηλεμεταφορέων. Το κόστος εγκατάστασης τηλεμεταφορέα σε έναν πλανήτη  $i$  είναι  $B[i]$  (εφόσον βέβαια ο πλανήτης  $i$  υποστηρίζει την τεχνολογία τηλεμεταφοράς). Σε ένα τέτοιο δίκτυο, εμπορεύματα μπορούν να μεταφερθούν από έναν πλανήτη  $i$  σε έναν πλανήτη  $j$  αν και μόνο αν οι πλανήτες  $i$  και  $j$  συνδέονται μεταξύ τους απευθείας, μέσω μονοπατιού καναλιών μεταφοράς, ή αν οι πλανήτες  $i$  και  $j$  συνδέονται, μέσω μονοπατιών καναλιών μεταφοράς, με δύο πλανήτες (με τον ένα ο  $i$  και με τον άλλο ο  $j$ ) που έχουν τηλεμεταφορέα.

Να γράψετε ένα πρόγραμμα που να υπολογίζει το ελάχιστο συνολικό κόστος για τη δημιουργία ενός τέτοιου διαστημικού δικτύου που επιτρέπει τη μεταφορά εμπορευμάτων μεταξύ κάθε ζεύγους πλανητών.

**Δεδομένα Εισόδου:** Το πρόγραμμά σας θα διαβάξει από το standard input τρεις θετικούς ακέραιους  $N$ ,  $K$  και  $M$ , που αντιστοιχούν στο συνολικό πλήθος των πλανητών, στο πλήθος των πλανητών όπου μπορεί να εγκατασταθεί τηλεμεταφορέας και στο πλήθος των δυνατών καναλιών μεταφοράς μεταξύ ζευγαριών πλανητών. Σε κάθε μία από τις επόμενες  $K$  γραμμές, θα περιέχονται δύο θετικοί ακέραιοι  $i$  και  $B[i]$  που δηλώνουν ότι είναι δυνατή η εγκατάσταση τηλεμεταφορέα στον πλανήτη  $i$  με κόστος  $B[i]$ . Στη συνέχεια θα υπάρχουν  $M$  γραμμές, καθεμία από τις οποίες θα περιέχει τρεις θετικούς ακέραιους  $i$ ,  $j$  και  $A[i, j]$  που δηλώνουν ότι είναι δυνατή η δημιουργία καναλιού μεταφοράς μεταξύ των πλανητών  $i$  και  $j$  με κόστος  $A[i, j]$ .

Να θεωρήσετε ότι οι πλανήτες αριθμούνται από 1 έως  $N$ , ότι όλα τα κανάλια μεταφοράς θα έχουν διαφορετικά άκρα, ότι τα κανάλια μεταφοράς είναι αμφίδρομα και ότι θα είναι πάντοτε εφικτό να κατασκευάσουμε ένα συνεκτικό διαστημικό δίκτυο που επιτρέπει τη μεταφορά εμπορευμάτων μεταξύ κάθε ζεύγους πλανητών.

**Δεδομένα Εξόδου:** Το πρόγραμμα σας πρέπει να τυπώνει στο standard output (στην πρώτη γραμμή) έναν θετικό ακέραιο που αντιστοιχεί στο ελάχιστο συνολικό κόστος για τη δημιουργία ενός διαστημικού δικτύου που επιτρέπει τη μεταφορά εμπορευμάτων μεταξύ κάθε ζεύγους πλανητών<sup>1</sup>. Προσέξτε ότι αν δημιουργήσουμε κανάλια επικοινωνίας που συνδέουν όλους τους πλανήτες, τότε δεν χρειάζεται να εγκαταστήσουμε τηλεμεταφορείς.

<sup>1</sup> **Επεξήγηση παραδείγματος:** Η βέλτιστη λύση είναι να εγκαταστήσουμε τηλεμεταφορείς στους πλανήτες 1 και 6, με κόστος  $3 + 5 = 8$ , και να δημιουργήσουμε κανάλια επικοινωνίας μεταξύ των πλανητών  $\{1, 3\}$ ,  $\{2, 3\}$ ,  $\{4, 5\}$ ,  $\{5, 7\}$  και  $\{6, 7\}$ , με συνολικό κόστος  $2 + 2 + 1 + 2 + 2 = 9$ . Έχουμε δηλαδή συνολικό κόστος  $8 + 9 = 17$ .

Περιορισμοί:	Παράδειγμα Εισόδου:	Παράδειγμα Εξόδου:
$2 \leq N \leq 10.000$	7 2 8	17
$0 \leq K \leq N$	1 3	
$N - 1 \leq M \leq 500.000$	6 5	
$1 \leq A[i, j] \leq 100.000$	4 6 3	
$1 \leq B[i] \leq 100.000$	6 7 2	
Όριο χρόνου εκτέλεσης: 1 sec.	3 2 2	
Όριο μνήμης: 64 MB.	5 7 2	
	5 4 1	
	3 5 9	
	1 3 2	
	4 7 5	

## Άσκηση 2: Καλοκαιρινές Διακοπές

Φέτος, στις καλοκαιρινές σας διακοπές, θα επισκεφθείτε με το αυτοκίνητο τη χώρα των Αλγορίθμων. Είστε πραγματικά ενθουσιασμένοι για αυτό! Είστε αποφασισμένοι να επισκεφθείτε όσο το δυνατόν περισσότερες πόλεις αυτής της αχανούς και αραιοκατοικημένης χώρας. Το μόνο που σας ανησυχεί είναι ο ανεφοδιασμός του αυτοκινήτου σας με καύσιμα. Το αυτοκίνητό σας έχει σχετικά μικρό ντεπόζιτο και βενζινάδικα υπάρχουν μόνο στις πόλεις. Επειδή οι αποστάσεις μεταξύ των πόλεων είναι μεγάλες, φοβάστε ότι μπορεί να μην είστε σε θέση να ταξιδέψετε σε κάποιες πόλεις. Για να δείτε αν θα τα καταφέρετε, χρειάζεται να υπολογίσετε διαδρομές που ελαχιστοποιούν τη μέγιστη απόσταση που θα χρειαστεί να διανύσετε χωρίς να υπάρχει δυνατότητα ανεφοδιασμού.

Ο φίλος σας από τους Μηχανολόγους προσπαθεί να υπολογίσει με ακρίβεια την αυτονομία του αυτοκινήτου σας. Εν τω μεταξύ, έχετε προμηθευτεί έναν λεπτομερή χάρτη της χώρας των Αλγορίθμων. Στον χάρτη υπάρχουν  $N$  πόλεις και  $M$  αμφίδρομες οδικές συνδέσεις. Κάθε οδική σύνδεση  $e$  συνδέει απευθείας τις δύο πόλεις  $x(e)$  και  $y(e)$  που βρίσκονται στα άκρα της και έχει μήκος  $d(e)$ . Έχετε ακόμη σημειώσει  $Q$  ζευγάρια πόλεων μεταξύ των οποίων θέλετε να μετακινηθείτε. Για κάθε τέτοιο ζευγάρι πόλεων  $(u, v)$ , θέλετε να υπολογίσετε μια διαδρομή που ελαχιστοποιεί τη μέγιστη απόσταση που θα χρειαστεί να διανύσετε χωρίς δυνατότητα ανεφοδιασμού<sup>2</sup>. Θα σημειώσετε αυτή την απόσταση και θα τη συγκρίνετε με την αυτονομία του αυτοκινήτου σας, ώστε να προγραμματίσετε το ταξίδι σας. Δεν σας πειράζει να ταξιδέψετε λίγο περισσότερο, άλλωστε θα βρρίσκεστε σε διακοπές. Το σημαντικό είναι να μην ξεμείνετε από καύσιμα!

Για να μην καθυστερείτε, αποφασίσατε να γράψετε ένα πρόγραμμα που υπολογίζει αυτές τις διαδρομές (και τις αντίστοιχες αποστάσεις που θα διανύσετε χωρίς δυνατότητα ανεφοδιασμού) για όλα τα ζευγάρια πόλεων που έχετε σημειώσει.

**Δεδομένα Εισόδου:** Το πρόγραμμά σας θα διαβάξει από το standard input, δύο θετικούς ακέραιους  $N$  και  $M$  που αντιστοιχούν στο πλήθος των πόλεων και στο πλήθος των οδικών συνδέσεων. Οι πόλεις αριθμούνται από 1 μέχρι  $N$ . Σε κάθε μία από τις επόμενες  $M$  γραμμές, θα υπάρχουν τρεις θετικοί ακέραιοι  $x(e)$ ,  $y(e)$  και  $d(e)$  που δηλώνουν ότι υπάρχει απευθείας οδική σύνδεση μεταξύ των πόλεων  $x(e)$  και  $y(e)$  με μήκος  $d(e)$ . Το οδικό δίκτυο που αποτυπώνεται στον χάρτη είναι μη κατευθυνόμενο, συνεκτικό και δεν περιέχει ανακυκλώσεις ή πολλαπλές οδικές συνδέσεις μεταξύ των ίδιων πόλεων. Στην γραμμή  $M + 2$ , θα υπάρχει ένας θετικός ακέραιος  $Q$  που αντιστοιχεί στο πλήθος των ζευγαριών

<sup>2</sup> Αξιολογείτε δηλαδή κάθε  $u - v$  μονοπάτι  $p$  με βάση το *bottleneck* κόστος του  $b(p) = \max_{e \in p} \{d(e)\}$ . Για κάθε ζευγάρι πόλεων  $(u, v)$ , πρέπει λοιπόν να υπολογίσετε ένα  $u - v$  μονοπάτι  $p_{uv}^*$  με ελάχιστο *bottleneck* κόστος  $b(p_{uv}^*)$ .

πόλεων μεταξύ των οποίων θέλετε να μετακινηθείτε. Σε κάθε μία από τις επόμενες  $Q$  γραμμές, θα υπάρχουν δύο θετικοί ακέραιοι  $u$  και  $v$ , που δηλώνουν ένα συγκεκριμένο ζευγάρι πόλεων.

**Δεδομένα Εξόδου:** Το πρόγραμμα σας πρέπει να τυπώνει στο standard output  $Q$  φυσικούς αριθμούς, σε μια διαφορετική γραμμή τον καθένα. Αν το  $i$ -οστό ζευγάρι πόλεων μεταξύ των οποίων θέλετε να ταξιδέψετε είναι το  $(u, v)$ , στην  $i$ -οστή γραμμή της εξόδου πρέπει να τυπωθεί το μήκος της μακρύτερης οδικής σύνδεσης στο  $v - u$  μονοπάτι που ελαχιστοποιεί την απόσταση που χρειάζεται να διανύσετε χωρίς να υπάρχει δυνατότητα ανεφοδιασμού.

Περιορισμοί:	Παράδειγμα Εισόδου:	Παράδειγμα Εξόδου:
$2 \leq N \leq 3.000$	5 6	1
$N - 1 \leq M \leq 100.000$	1 2 1	2
$1 \leq Q \leq 100.000$	1 5 6	3
$1 \leq d(e) \leq 10^8$	2 3 2	4
Όριο χρόνου εκτέλεσης: 1 sec.	2 4 4	2
Όριο μνήμης: 64 MB.	3 4 3	3
	4 5 4	4
Θα υπάρχουν και κάποια bonus αρχεία εισόδου	10	3
με $N = 30.000$ και	1 2	4
$100.000 \leq M \leq 200.000$ .	1 3	4
	1 4	
	1 5	
	2 3	
	2 4	
	2 5	
	3 4	
	3 5	
	4 5	