



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο  
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών  
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών

**Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα**

Διδάσκοντες: Δημήτρης Φωτάκης, Δώρα Σούλιου

**4η Σειρά Προγραμματιστικών Ασκήσεων - Ημ/νία Παράδοσης 6/3/2017**

### Άσκηση 1: Προεδρική Εκδρομή

Μία φορά το χρόνο, ο Πρόεδρος της Δημοκρατίας των Αλγορίθμων παίρνει το πολυτελές του αυτοκίνητο και κάνει μια μεγάλη εκδρομή στη χώρα, θέλοντας να απολαύσει τα θαυμάσια τοπία και να έρθει σε επαφή με τους κατοίκους. Το δρομολόγιό του είναι αυστηρά προκαθορισμένο και ανακοινώνεται έγκαιρα, ώστε οι κάτοικοι να προγραμματίσουν τις δραστηριότητές τους και να μπορούν να παρακολουθήσουν την προεδρική πομπή. Για λόγους ασφαλείας, αμέσως μόλις το προεδρικό αυτοκίνητο εισέρχεται σε κάποιον δρόμο, η αστυνομία απαγορεύει την είσοδο σε αυτόν. Η απαγόρευση εισόδου ισχύει μέχρι τη στιγμή που το προεδρικό αυτοκίνητο ολοκληρώνει το συγκεκριμένο τμήμα της διαδρομής και δεν επηρεάζει τα οχήματα που είχαν εισέλθει στον δρόμο νωρίτερα (ανεξάρτητα από την κατεύθυνση κίνησης των οχημάτων και του προεδρικού αυτοκινήτου). Φέτος χρειάζεται να ταξιδέψετε την ημέρα της προεδρικής εκδρομής και θέλετε να ελαχιστοποιήσετε τις καθυστερήσεις.

Ξεθάβετε λοιπόν τον χάρτη της χώρας των Αλγορίθμων και το ρίχνετε στη δουλειά. Στη χώρα υπάρχουν συνολικά  $N$  πόλεις και  $M$  δρόμοι διπλής κατεύθυνσης. Κάθε δρόμος  $e$  συνδέει 2 διαφορετικές πόλεις και χρειάζεται  $d(e)$  λεπτά για να διανυθεί (από οποιοδήποτε όχημα, ανεξάρτητα από τις κυκλοφοριακές συνθήκες). Το δρομολόγιο του Προέδρου περιλαμβάνει  $K$  διαφορετικές πόλεις, τις  $c(1), c(2), \dots, c(K-1), c(K)$  με αυτή τη σειρά. Ο Πρόεδρος ξεκινά το λεπτό  $t(1) = 0$  από την πόλη  $c(1)$ , φθάνει στην πόλη  $c(2)$  στο λεπτό  $t(2) = d(c(1), c(2))$ , φθάνει στην πόλη  $c(3)$  στο λεπτό  $t(3) = d(c(1), c(2)) + d(c(2), c(3))$ , κοκ. Αν ο Πρόεδρος φθάσει στην πόλη  $c(j)$  στο λεπτό  $t(j)$ , δεν επιτρέπεται η είσοδος άλλων οχημάτων στον δρόμο  $\{c(j), c(j+1)\}$  (σε καμία από τις δύο κατευθύνσεις) από το λεπτό  $t(j)$  μέχρι και το λεπτό  $t(j) + d(c(j), c(j+1)) - 1$ . Ο δρόμος μπορεί να χρησιμοποιηθεί κανονικά, και στις δύο κατευθύνσεις, αν ένα όχημα ξεκινήσει να τον χρησιμοποιεί οποιαδήποτε χρονική στιγμή μέχρι και το λεπτό  $t(j) - 1$  και οποιαδήποτε χρονική στιγμή από το λεπτό  $t(j) + d(c(j), c(j+1))$  και μετά.

Εσείς θα ταξιδέψετε από την πόλη  $A$  στην πόλη  $B$  και θα ξεκινήσετε το ταξίδι σας το λεπτό  $T \geq 0$ . Θέλετε να γράψετε ένα πρόγραμμα που υπολογίζει την ελάχιστη χρονική διάρκεια της διαδρομής σας, με δεδομένη την περιορισμένη διαθεσιμότητα κάποιων δρόμων λόγω της προεδρικής εκδρομής.

**Δεδομένα Εισόδου:** Το πρόγραμμά σας θα διαβάζει από το standard input, στην πρώτη γραμμή, δύο θετικούς ακέραιους,  $N$  και  $M$ , που αντιστοιχούν στο πλήθος των πόλεων και στο πλήθος των δρόμων (οι πόλεις είναι αριθμημένες από 1 μέχρι  $N$ ). Η δεύτερη γραμμή θα περιέχει 4 θετικούς ακέραιους  $A, B, T$  και  $K$  που αντιστοιχούν στην αφετηρία  $A$ , στον τερματισμό  $B$  και στο λεπτό που ξεκινάτε το ταξίδι σας, και στο πλήθος των πόλεων που περιλαμβάνονται στο δρομολόγιο του Προέδρου. Η τρίτη γραμμή θα περιέχει θετικούς ακέραιους που αντιστοιχούν στις πόλεις  $c(1), c(2), \dots, c(K)$  που περιλαμβάνονται στο δρομολόγιο. Σε κάθε μία από τις επόμενες  $M$  γραμμές θα υπάρχουν 3 φυσικοί αριθμοί  $u, v, d(u, v)$  που δηλώνουν ότι υπάρχει δρόμος που ενώνει τις πόλεις  $u$  και  $v$  και διανύεται σε  $d(u, v)$  λεπτά. Μπορείτε να υποθέσετε ότι η χώρα των Αλγορίθμων είναι συνεκτική, ότι μεταξύ κάθε δύο διαδοχικών πόλεων στο δρομολόγιο του Προέδρου υπάρχει δρόμος, και ότι ο Πρόεδρος δεν διέρχεται δύο φορές από τον ίδιο δρόμο.

**Δεδομένα Εξόδου:** Το πρόγραμμά σας πρέπει να τυπώνει στο standard output (στην πρώτη γραμμή) έναν αμέριστο που αντιστοιχεί στην ελάχιστη χρονική διάρκεια (σε λεπτά) του ταξιδιού σας από την πόλη  $A$  στην πόλη  $B$ , με δεδομένο ότι το ταξίδι σας ξεκινά το λεπτό  $T$ <sup>1</sup>.

<b>Περιορισμοί:</b>	<b>Παράδειγμα Εισόδου:</b>	<b>Παράδειγμα Εξόδου:</b>
$3 \leq K \leq N \leq 60000$	6 5	21
$N - 1 \leq M \leq 300000$	1 6 20 4	
$0 \leq d(u, v), T \leq 10000$	5 3 2 4	
Όριο χρόνου εκτέλεσης: 1 sec.	1 2 2	
Όριο μνήμης: 64 MB.	2 3 8	
	2 4 3	
	3 6 10	
	3 5 15	

## Άσκηση 2: Εθελοντής της Χρονιάς

Μετά από τόσα χρόνια εθελοντικής προσφοράς στην επαρχία των Αλγόριθμων για Κατευθυνόμενα Γραφήματα, φέτος αποφασίσατε να βάλετε υποψηφιότητα για εθελοντής της χρονιάς. Δυστυχώς το αποφασίσατε μόλις σήμερα, και αύριο λήγει η προθεσμία για την συλλογή υπογραφών που θα υποστηρίζουν την υποψηφιότητά σας και για την κατάθεσή τους σε κάποιο από τα γραφεία του διαγωνισμού. Γνωρίζετε βέβαια ότι υπογραφές είναι πολύ σημαντικές: όσο περισσότερες, τόσο μεγαλύτερη η πιθανότητα να ανακηρυχθείτε εθελοντής της χρονιάς!

Σχεδιάζετε λοιπόν αύριο να ξυπνήσετε πρωί - πρωί και ξεκινώντας από τη γειτονιά σας, να περάσετε από τις γειτονιές όπου έχετε φίλους που θα υποστηρίξουν την υποψηφιότητά σας. Αφού μαζέψετε όσο το δυνατόν περισσότερες υπογραφές από τους φίλους σας, θέλετε να καταλήξετε σε κάποιο από τα γραφεία του διαγωνισμού για να υποβάλετε την υποψηφιότητά σας. Ένα σημαντικό εμπόδιο είναι ότι οι δρόμοι της επαρχίας είναι μονόδρομοι. Έτσι είναι πιθανόν να μην υπάρχει διαδρομή που περνάει από όλους τους φίλους σας και καταλήγει σε κάποιο από τα γραφεία του διαγωνισμού (μπορεί να μην υπάρχει καν διαδρομή από το σπίτι σας προς κάποιο από τα γραφεία του διαγωνισμού!). Πρέπει λοιπόν να φτιάξετε ένα λεπτομερές πλάνο που θα μεγιστοποιεί το πλήθος των υπογραφών που θα συλλέξετε, πριν υποβάλετε την αίτησή σας.

Για να ετοιμάσετε το πλάνο σας, συμβουλευέστε τον χάρτη της επαρχίας. Η επαρχία έχει συνολικά  $N$  γειτονιές και  $M$  μονόδρομους. Κάθε μονόδρομος  $e = (u, v)$  συνδέει 2 διαφορετικές γειτονιές, τις  $u$  και  $v$ , και μπορεί να διανυθεί μόνο ξεκινώντας από την  $u$  και καταλήγοντας στην  $v$ . Για κάθε γειτονιά  $u$ , έχετε σημειώσει αν υπάρχει γραφείο του διαγωνισμού στην  $u$  για να καταθέσετε την αίτησή σας καθώς και πόσοι φίλοι σας που θα υποστηρίξουν την αίτησή σας ζουν στην  $u$ . Σκέφτεστε ότι μπορεί τελικά να χρειαστεί να περάσετε από κάποιες γειτονιές (και από κάποιους μονόδρομους) πολλές φορές, αλλά κάθε φίλος σας μπορεί να υπογράψει μόνο μία φορά.

Το μόνο που μένει είναι να γράψετε ένα πρόγραμμα που θα υπολογίζει το μέγιστο πλήθος υπογραφών που μπορείτε να μαζέψετε, με δεδομένο ότι πρέπει να ξεκινήσετε από τη γειτονιά σας και να καταλήξετε σε μία γειτονιά που έχει γραφείο του διαγωνισμού, για να υποβάλετε την αίτησή σας (αν βέβαια κάτι τέτοιο είναι εφικτό).

<sup>1</sup> **Εξήγηση Παραδείγματος:** Ο Πρόεδρος ξεκινά το λεπτό 0 από την πόλη 5, φθάνει στην πόλη 3 στο λεπτό 15, στην πόλη 2 στο λεπτό 23, και καταλήγει στην πόλη 4 στο λεπτό 26. Έτσι δεν επιτρέπεται η είσοδος οχημάτων στον δρόμο  $\{2, 3\}$  από το λεπτό 15 μέχρι και το λεπτό 22. Οπότε εσείς ξεκινάτε το λεπτό 20 από την πόλη 1, φθάνετε στην πόλη 2 στο λεπτό 22 και αναχωρείτε από αυτή το λεπτό 23, φθάνετε στην πόλη 3 στο λεπτό 31, και καταλήγετε στην πόλη 6 στο λεπτό 41. Η συνολική διάρκεια του ταξιδιού σας είναι  $41 - 20 = 21$  λεπτά.

**Δεδομένα Εισόδου:** Το πρόγραμμά σας θα διαβάζει από το standard input, στην πρώτη γραμμή, δύο θετικούς ακέραιους,  $N$  και  $M$ , που αντιστοιχούν στο πλήθος των γειτονιών και στο πλήθος των μονόδρομων της επαρχίας (οι γειτονιές αριθμούνται από 1 μέχρι  $N$  και η γειτονιά σας είναι η 1). Στην  $i$ -οστή από τις επόμενες  $N$  γραμμές θα υπάρχουν 2 ακέραιοι αριθμοί  $o(i)$  και  $f(i)$ . Το  $o(i)$  θα είναι είτε 1 είτε 0, δηλώνοντας ότι η γειτονιά  $i$  έχει ή δεν έχει γραφείο του διαγωνισμού, αντίστοιχα. Το  $f(i)$  θα είναι μη αρνητικός ακέραιος που δηλώνει πόσοι φίλοι σας πρόθυμοι να υπογράψουν για να υποστηρίξουν την αίτησή σας ζουν στην γειτονιά  $i$  (αν λοιπόν περάσετε από την γειτονιά  $i$ , θα μαζέψετε  $f(i)$  υπογραφές). Σε καθεμία από τις επόμενες  $M$  γραμμές θα υπάρχουν δύο φυσικοί αριθμοί  $u$  και  $v$  που δηλώνουν ότι υπάρχει μονόδρομος  $(u, v)$  που μπορεί να διανυθεί ξεκινώντας από την  $u$  και καταλήγοντας στην  $v$ .

**Δεδομένα Εξόδου:** Το πρόγραμμά σας πρέπει να τυπώνει στο standard output (στην πρώτη γραμμή) έναν ακέραιο που αντιστοιχεί στο μέγιστο πλήθος υπογραφών που μπορείτε να μαζέψετε ξεκινώντας από τη γειτονιά 1 και καταλήγοντας σε κάποια γειτονιά που έχει γραφείο του διαγωνισμού για να υποβάλετε την αίτησή σας. Αν αυτό δεν είναι εφικτό, το πρόγραμμά σας πρέπει να τυπώνει  $-1$ .

**Περιορισμοί:**

$3 \leq N \leq 200000$   
 $N - 1 \leq M \leq 600000$   
 $0 \leq f(i) \leq 5000$   
 $o(i) \in \{0, 1\}$   
 Όριο χρόνου εκτέλεσης: 1 sec.  
 Όριο μνήμης: 64 MB.

**Παράδειγμα Εισόδου:**

6 7  
 0 10  
 0 12  
 1 8  
 1 16  
 1 1  
 1 5  
 1 2  
 2 3  
 2 4  
 2 6  
 3 5  
 4 1  
 6 5

**Παράδειγμα Εξόδου:**

4 7