Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Αλγοριθμική Θεωρία Παιγνίων

Μεταπτυχιακό ΣΗΜΜΥ, ΣΕΜΦΕ, ΜΠΛΑ

Διδάσκοντες: Σ. Ζάχος, Δ. Φωτάκης

3η Γραπτή Εργασία, Ημ/νια Παράδοσης: 29/6/2016

Θέμα 1 (1 μον.). Θεωρούμε δύο αγαθά, ένα μπουκάλι κρασί και ένα ανοιχτήρι, και δύο παίκτες. Για τον παίκτη Α, το κρασί και το ανοιχτήρι μαζί αξίζουν 10 ευρώ, οτιδήποτε άλλο έχει μηδενική αξία. Για τον παίκτη Β, το κρασί (είτε μαζί με το ανοιχτήρι είτε μόνο του) έχει αξία 9 ευρώ και το ανοιχτήρι μόνο του έχει μηδενική αξία. Να υπολογίσετε το αποτέλεσμα του VCG (κατανομή των αγαθών και πληρωμές). Να κάνετε το ίδιο θεωρώντας και έναν τρίτον παίκτη Γ, για τον οποίο το ανοιχτήρι (είτε μαζί με το κρασί είτε μόνο του) έχει αξία $r > 0$ ευρώ και το κρασί μόνο του έχει μηδενική αξία. Τι παρατηρείτε σε σχέση με τις συνολικές πληρωμές του μηχανισμού; Να σχολιάσετε σχετικά.

Θέμα 2 (2,5 μον.). Θεωρούμε μια δημοπρασία για m διαφορετικά αντικείμενα (ας υποθέσουμε, για λόγους απλότητας, ότι κάθε αντικείμενο υπάρχει σε απεριόριστα αντίγραφα) και n παίκτες. Κάθε παίκτης i έχει μια αύξουσα συνάρτηση αποτίμησης $v_i : 2^{[m]} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ που ορίζει πόσο αξίζει κάθε υποσύνολο αντικειμένων για τον i. Ο μηχανισμός ορίζει την αρχική τιμή κάθε προϊόντος $p_1^j = L/m$, για κάποιο κατάλληλα επιλεγμένο $L > 0$. Στη συνέχεια, ζητά με τη σειρά από κάθε παίκτη $i \in \{1, \ldots, n\}$ να επιλέξει το σύνολο S_i των αντικειμένων που μεγιστοποιεί τη συνάρτηση $v_i(S_i) - \sum_{j \in S_i} p_i^j$ και του το δίνει. Πριν προχωρήσει στον επόμενο παίκτη, ο μηχανισμός αναπροσαρμόζει τις τιμές όλων των αντικειμένων $j \in S_i$ πολλαπλασιαστικά, θέτοντας $p_{i+1}^j = r \cdot p_i^j$, για κάποιο $r > 1$.

(α) Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει το πολύ ένας παίκτης με αξία (για όλα τα αντικείμενα) μεγαλύτερη του L. Να δείξετε ότι ο μηχανισμός διαθέτει το πολύ $2 + \log_r m$ αντίγραφα από κάθε αντικείμενο.

(β) Να δείξετε ότι αν $L \leq V^*/2$, τότε ο μηχανισμός επιτυγχάνει συνολική αξία $\sum_i v_i(S_i) \geq V^*/(2r)$, όπου V^* η συνολική αξία της βέλτιστης λύσης που όμως διαθέτει το πολύ ένα αντίγραφο από κάθε αντικείμενο. Για να αποδείξετε αυτόν τον ισχυρισμό, πρέπει πρώτα να δείξετε (i) ότι λόγω της πολλαπλασιαστικής αναπροσαρμογής των τιμών, στο τέλος του μηχανισμού έχουμε ότι

$$\sum_i v_i(S_i) \geq \sum_{j \in [m]} \frac{p_{n+1}^j - p_0^j}{r - 1} \Rightarrow (r-1) \sum_i v_i(S_i) \geq \sum_{j \in m} p_{n+1}^j - L\,,$$

και (ii) ότι επειδή η βέλτιστη λύση δίνει το πολύ ένα αντίγραφο από κάθε αντικείμενο,

$$\sum_i v_i(S_i) \geq V^* - \sum_{j \in [m]} p_{n+1}^j$$

Θέμα 3 (2,5 μον.). Η δημοτική αρχή μελετά την κατασκευή ενός νέου πάρκου, το οποίο αναμένεται να κοστίσει C ευρώ. Κάθε δημότης i, $i = 1, \ldots, n$, εκτιμά την ωφέλειά του από το νέο πάρκο σε $v_i \geq 0$ ευρώ, τιμή που είναι γνωστή μόνο στον ίδιο (private information). Η δημοτική αρχή ζητάει από τους δημότες να δηλώσουν τις εκτιμήσεις τους $v_1, \ldots, v_n$, και θα προχωρήσει στην κατασκευή του πάρκου μόνο αν $\sum_{i=1}^n v_i \geq C$. Σε αυτή την περίπτωση, κάθε δημότης θα πληρώσει μια εισφορά $p_i \geq 0$. Η εισφορά έχει στόχο οι δημότες να δηλώσουν τις πραγματικές τους εκτιμήσεις, και όχι να καλύψει το συνολικό κόστος του πάρκου. Να σχεδιάσετε έναν φιλαλήθη (truthful) μηχανισμό για αυτό το πρόβλημα.

Θέμα 4 (2,5 μον.). Θεωρούμε την περίπτωση του Combinatorial Public Project προβλήματος (CPPP) όπου οι παίκτες έχουν 2-$\{0,1\}$-unit demand αποτιμήσεις. Συγκεκριμένα, έχουμε ένα σύνολο $U = \{1,\ldots,m\}$ με m αντικείμενα, από τα οποία θα επιλέξουμε το πολύ $k \leq m$, και n παίκτες. Κάθε παίκτης i έχει αξία 1 για δύο μόνο αντικείμενα, ας τα ονομάζουμε $j_1(i)$ και $j_2(i)$, και αξία 0 για τα υπόλοιπα. Η αξία κάθε παίκτη i για ένα σύνολο αντικειμένων S είναι $v_i(S) = 1$, αν το S περιέχει τουλάχιστον ένα από τα $j_1(i)$ και $j_2(i)$ (δηλ. αν $S \cap \{j_1(i), j_2(i)\} \neq \emptyset$), και $v_i(S) = 0$, διαφορετικά. Στόχος είναι να υπολογίσουμε ένα σύνολο αντικειμένων $S \subseteq U$, με $|S| \leq k$, το οποίο μεγιστοποιεί τη συνολική αξία των παικτών $\sum_i v_i(S)$.

(α) Να δείξετε ότι το Combinatorial Public Project πρόβλημα παραμένει **NP**-δύσκολο όταν οι παίκτες έχουν 2-$\{0,1\}$-unit demand αποτιμήσεις.

(β) Να διατυπώσετε έναν 2-προσεγγιστικό φιλαλήθη μηχανισμό για το Combinatorial Public Project πρόβλημα με 2-$\{0,1\}$-unit demand αποτιμήσεις.

Θέμα 5 (2,5 μον.). Άσκηση **11.9**, σελ. 299, του βιβλίου [AGT]. Προσέξτε μόνο ότι το $\arg\max$ πρέπει να είναι $\arg\min$ και ότι ο μηχανισμός πρέπει να πληρώνει τις αντίστοιχες τιμές στους agents που επιλέγονται ως μειοδότες.