



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

---

## Αλγόριθμοι Δικτύων και Πολυπλοκότητα

Εαρινό εξάμηνο 2014

(ΣΗΜΜΥ, ΣΕΜΦΕ, ΜΠΛΑ)

Διδάσκων: Α. Παγουρτζής

---

Δεύτερη σειρά ασκήσεων

Προθεσμία παράδοσης: 28 Ιουλίου 2014

## Άσκηση 1

Αποδείξτε το θεώρημα König-Egervány: σε κάθε διμερή γράφο το μέγεθος του μέγιστου ταιριάσματος (maximum matching) ισούται με το μέγεθος της ελάχιστης κάλυψης κορυφών (vertex cover).

Ακολουθήστε τις υποδείξεις της άσκησης 12.7 του Vazirani.

## Άσκηση 2

Θεωρήστε το πρόβλημα Maximum Path Coloring (MaxPC): Δίνεται μη κατευθυνόμενος γράφος  $G = (V, E)$ , μονοπάτια  $p_i = (s_i, t_i)$ ,  $1 \leq i \leq k$ , και ένας αριθμός χρωμάτων  $w$ . Ζητείται να χρωματιστούν όσο το δυνατόν περισσότερα μονοπάτια έτσι ώστε μονοπάτια που έχουν κοινή ακμή να παίρνουν διαφορετικό χρώμα.

[Σημείωση: μία από τις εφαρμογές του προβλήματος είναι στην ανάθεση μηκών κύματος σε οπτικά δίκτυα: κάθε χρώμα αντιστοιχεί σε κάποιο μήκος κύματος και τα μονοπάτια αντιστοιχούν σε συνδιαλέξεις. Κάθε οπτική ίνα διαθέτει  $w$  μήκη κύματος, και κάθε συνδιάλεξη πρέπει να εξυπηρετηθεί από ένα και μόνο μήκος κύματος (από την αρχή ως το τέλος της), έτσι ώστε συνδιαλέξεις που χρησιμοποιούν την ίδια οπτική ίνα να βρίσκονται σε διαφορετικά μήκη κύματος.]

(α) Σχεδιάστε έναν ακριβή αλγόριθμο πολυωνυμικού χρόνου για το MaxPC στην περίπτωση που ο γράφος εισόδου είναι αλυσίδα («ευθεία γραμμή», λέγεται και path graph). Αποδείξτε την ορθότητα και την πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας.

Υπόδειξη: προσπαθήστε να βρείτε λύση για ένα χρώμα ( $w = 1$ ) και στη συνέχεια γενικεύστε την.

(β) Σχεδιάστε έναν ακριβή αλγόριθμο πολυωνυμικού χρόνου για το MaxPC στην περίπτωση που ο γράφος εισόδου είναι δακτύλιος (ring graph) και έχουμε ένα διαθέσιμο χρώμα ( $w = 1$ ). Δείξτε με ποιον τρόπο μπορούμε να επιτύχουμε  $(1 - 1/e)$ -προσεγγιστικό αλγόριθμο για το MaxPC σε δακτυλίους, για  $w > 1$ .

(γ) Μπορείτε να επεκτείνετε το αποτέλεσμα του (β) στο πρόβλημα Maximum Routing and Path Coloring (MaxRPC); Αν ναι πώς; Αν όχι γιατί;

Ορισμός MaxRPC: Δίνεται μη κατευθυνόμενος γράφος  $G = (V, E)$ , αιτήσεις σύνδεσης  $r_i = (s_i, t_i)$ ,  $1 \leq i \leq k$ , και ένας αριθμός χρωμάτων  $w$ . Ζητείται να ανατεθεί ένα μονοπάτι σε κάθε αίτηση και ένα χρώμα (από τα  $w$  διαθέσιμα) σε όσο το δυνατόν περισσότερα μονοπάτια έτσι ώστε μονοπάτια που έχουν κοινή ακμή να παίρνουν διαφορετικό χρώμα.

## Άσκηση 3

Σχεδιάστε συγχρονισμένο κατανεμημένο αλγόριθμο εύρεσης (ενός οποιουδήποτε) συνδεδετικού δένδρου σε δίκτυο μορφής torus  $n \times n$ . Θεωρήστε ότι κάθε κόμβος γνωρίζει μόνο το  $n$  και τη μορφή του δικτύου, ότι μπορεί να ανταλλάξει μηνύματα με τους γειτονικούς του κόμβους και ότι μπορεί να διακρίνει τους γείτονές του σε αριστερό, δεξιό, πάνω και κάτω. Τέλος θεωρήστε ότι οι κόμβοι έχουν μοναδικούς αριθμούς ταυτότητας (UIDs).

Ποια είναι η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας σε 'γύρους' (round complexity) και σε πλήθος μηνυμάτων (communication complexity);